

Regulatorul liniar pătratic (LQR)

1 PROBLEMA DE CONTROL OPTIMAL PENTRU SISTEME CONTINUE

Pentru un sistem continuu cu n variabile de stare și m variabile de intrare, descris de:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

cu condițiile inițiale $x(0)=x_0$, se cere să se calculeze vectorul de comenzi optime $u^*(t)$, care minimizează funcția de performanță:

$$J = x(t_f)^T Sx(t_f) + \int_0^{t_f} (x(t)^T Qx(t) + u(t)^T Ru(t))dt \quad (2)$$

unde S și Q – sunt matrici simetrice pozitiv semidefinite cu dimensiunea $n \times n$, iar R este o matrice simetrică pozitiv definită cu dimensiunea $m \times m$.

1.1 Regulatorul LQR pentru sisteme continue

Comanda optimă rezultă de forma:

$$u^*(t) = -K(t)x(t), \quad (3)$$

sau
$$u^*(t) = -Kx(t), \quad (4)$$

unde K este matricea de reacție de la stare, de dimensiune $m \times n$.

Implementarea unui regulator LQR, într-un sistem cu reacție de la stare este prezentată în Figura 1.

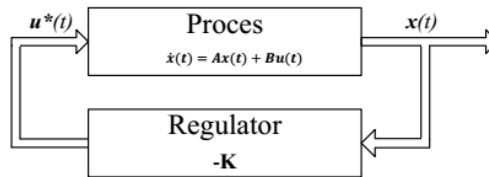


Figura 1. SCHEMA BLOC A SISTEMULUI CU REACȚIE DE LA STARE

Sistemul închis va fi reprezentat de ecuația de stare:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t),$$

Exemplu: Pentru un sistem cu o singură variabilă de comandă ($m=1$), referință 0 și condiții inițiale nenule, schema bloc de stabilizare a sistemului este prezentată în Figura 2. Dacă sistemul are n variabile de stare, $x(t) = [x_1(t) \dots x_n(t)]^T$, matricea de reacție de la stare K va avea dimensiunea $1 \times n$, și variabila $u^*(t)$ va avea expresia:

$$u^*(t) = -Kx(t) = -k_1 x_1(t) - k_2 x_2(t) - \dots - k_n x_n(t)$$

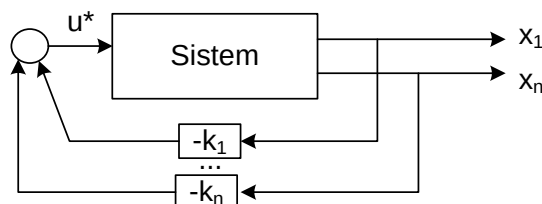


Figura 2 SCHEMA BLOC A SISTEMULUI ÎNCHIS

2 PROBLEMA DE CONTROL OPTIMAL PENTRU SISTEME DISCRETE

Pentru un sistem liniar discret cu n variabile de stare și m variabile de comandă, descris de:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k, \quad (5)$$

cu $k = 1, \dots, N-1$, și condițiile inițiale $\mathbf{x}_0$, se cere să se calculeze secvența de comenzi optime: $\mathbf{u}_0^*, \mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_{N-1}^*$, care minimizează funcția de performanță:

$$J = \mathbf{x}_N^T \mathbf{H}_N \mathbf{x}_N + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k \quad (6)$$

unde:

$\mathbf{H}_N$ și $\mathbf{Q}$ – sunt matrici simetrice pozitiv semidefinite cu dimensiunea $n \times n$,
 $\mathbf{R}$ - este o matrice simetrică pozitiv definită cu dimensiunea $m \times m$.

2.1 Regulatorul LQR pentru sisteme discrete

Comanda optimă rezultă de forma:

$$\mathbf{u}_k^* = -\mathbf{K}_k \mathbf{x}_k, \quad (7)$$

sau

$$\mathbf{u}_k^* = -\mathbf{K} \mathbf{x}_k, \quad (8)$$

unde $\mathbf{K}$ este matricea de reacție de la stare.

Schema bloc generală este prezentată în Figura 3.

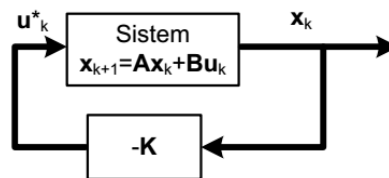


Figura 3. SCHEMA BLOC DE STABILIZARE A SISTEMULUI

Schema bloc de stabilizare a sistemului, cu referință 0, condiții inițiale nenule și o singură variabilă de comandă este prezentată în Figura 4.

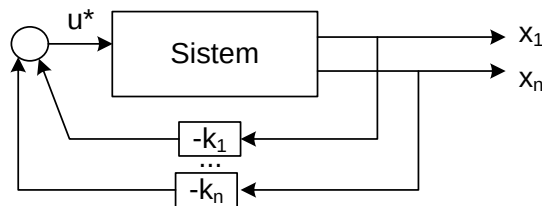


Figura 4. SCHEMA BLOC A SISTEMULUI ÎNCHIS (CU REFERINȚĂ 0 ȘI CONDIȚII INIȚIALE)

3 STUDII DE CAZ

- (1) Selectați un proces dintre cele propuse în fișierele atașate, sau altul la alegere, din cele studiate anterior sau în funcție de interesele dumneavoastră:
 - a. Linear - Active Mass Damper.pdf
 - b. Linear - Linear Flexible Joint.pdf
 - c. Rotary - 2D Flexible Link.pdf
 - d. Rotary - Flexible Joint.pdf
- (2) Stabiliți clar care sunt variabilele de intrare, ieșire și de stare pentru procesul ales.
- (3) Simulați procesul în buclă deschisă, fără regulator, cu o intrare la alegere și explicați rezultatele.
- (4) Implementați un regulator LQR care să stabilizeze procesul ales și analizați rezultatele. Implementați regulatorul pentru sistemul continuu **sau** discret, la alegere.

4 ETAPE DE REZOLVARE ȘI ANALIZĂ

4.1 LQR pentru sistemul continuu

- a) Alegeți un set de condiții inițiale pentru variabilele de stare, explicați semnificația lor fizică.
- b) Scrieți o funcție pătratică de performanță care să fie minimizată astfel încât stările sistemului să ajungă în echilibru (toate variabilele de stare să fie zero în regim staționar, sau referința = 0). Alegeți un set de valori inițiale pentru matricile **Q** și **R**.
- c) Calculați matricea de reacție de la stare **K** cu funcția Matlab *lqr*.
- d) Simulați evoluția sistemului cu reacție de la stare din condițiile inițiale alese la punctul a) și cu regulatorul **K** calculat anterior, după schema bloc din Figura 1 sau Figura 2. Reprezentați grafic evoluția stărilor și a comenzii. Simularea poate fi realizată într-una din următoarele variante, sau altele, la alegere:
 - i. Utilizați Simulink.
 - ii. Simulați sistemul închis într-un script Matlab. Integrați ecuațiile de stare pornind de la condițiile inițiale alese pentru sistemul închis.
 - iii. Simulați răspunsul la condiții inițiale a sistemului închis utilizând funcția Matlab *initial* pentru sistemul închis.
- e) Variați pe rând elementele matricilor **Q** și **R**, simulați sistemul în fiecare caz și explicați care este influența lor asupra stărilor și comenzii sistemului.
- f) Calculați matricea de reacție de la stare variabilă în timp, **K(t)** utilizând Algoritmul 2 din curs (6-LQR_and_estimation.pdf, pag. 16 sau din prezentare 4.1-LQR_slides.pdf, pag 13)
- g) Reprezentați grafic elementele matricii de reacție de la stare variabile **K(t)** calculate mai sus, în funcție de timp și arătați că acestea converg spre valorile calculate la punctul c).
- h) Pentru un set de valori ale matricilor **Q** și **R** alese, simulați evoluția stării și comenzii pentru sistemul închis cu matricea regulator variabilă în timp **K(t)**. Comparați rezultatele cu cele obținute cu matricea **K** calculată cu funcția Matlab *lqr* la punctul d).

4.2 LQR pentru sistemul discret

- a) Determinați un model discretizat al sistemului, păstrând semnificația variabilelor de stare.
- b) Alegeți un set de condiții inițiale pentru variabilele de stare și explicați semnificația lor fizică.
- c) Scrieți o funcție pătratică de performanță care să fie minimizată astfel încât stările sistemului să ajungă în echilibru. Alegeți un set de valori pentru matricile $\mathbf{H}_N$, $\mathbf{Q}$ și $\mathbf{R}$.
- d) Calculați matricea de reacție de la stare $\mathbf{K}$ cu funcția Matlab *dlqr*.
- e) Simulați evoluția sistemului cu reacție de la stare (Figura 3 sau Figura 4) din condițiile inițiale alese și cu regulatorul $\mathbf{K}$ calculat anterior. Reprezentați grafic evoluția stărilor și a comenzii. Simularea poate fi realizată într-una din următoarele variante:
 - i. Utilizați Simulink.
 - ii. Simulați sistemul închis într-un script Matlab. Calculați iterativ valorile stărilor pornind din condițiile inițiale alese, valorile următoare fiind date de ecuațiile de stare ale sistemului închis.
 - iii. Simulați răspunsul la condiții inițiale a sistemului închis utilizând funcția Matlab *dinitial* pentru sistemul închis.
- f) Calculați matricea de reacție de la stare variabilă în timp, $\mathbf{K}_k$ utilizând Algoritmul 1 din curs (6-LQR_and_estimation.pdf, pag. 10 sau din prezentare 4.1-LQR_slides.pdf, pag.19).
- g) Reprezentați grafic elementele matricii de reacție de la stare variabile $\mathbf{K}_k$ calculate mai sus, în funcție de timp și arătați că acestea converg spre valorile calculate la punctul d).
- h) Pentru un set de valori ale matricilor $\mathbf{Q}$ și $\mathbf{R}$ alese, simulați evoluția stării și comenzii pentru sistemul închis cu matricea regulator variabilă în timp $\mathbf{K}_k$. Comparați rezultatele cu cele obținute cu matricea $\mathbf{K}$ calculată cu funcția Matlab *dlqr*.